Über Inter- und Extrapolation von Operatoren vom schwachen Typ

Anwendung auf ein Ergebnis von R. A. Hunt über die Konvergenz der Partialsummen von Fourierreihen

INAUGURAL - DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg

Vorgelegt von

Peter Bautsch

aus Komotau

Marburg 1970

Kleinoffsetdruck: Görich & Weiershäuser, Marburg

Über Inter- und Extrapolation von Operatoren vom schwachen Typ

Anwendung auf ein Ergebnis von R. A. Hunt über die Konvergenz der Partialsummen von Fourierreihen

INAUGURAL - DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg

Vorgelegt von

Peter Bautsch

aus Komotau

Marburg 1970

Kleinoffsetdruck: Görich & Weiershäuser, Marburg

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 5. Juni 1970

Tag der mündlichen Prüfung am 1. Juli 1970

Berichterstatter: Prof. Dr. Peyerimhoff

Mitberichterstatter: Prof. Dr. Avacumović

Über Inter- und Extrapolation von Operatoren vom schwachen Typ. Anwendung auf ein Ergebnis von R. A. Hunt über die Konvergenz der Partialsummen von Fourierreihen.

A. Einleitung

E.M.Stein hat die Definition des schwachen Typs für Operatoren, die auf L_p-Räumen definiert sind, ausgedehnt auf Operatoren, die auf Orlicz-Räumen L_Φ definiert sind (vgl. [3], vor Theorem 3; zum Begriff "Operator vom schwachen Typ (p,q)" vgl. man [1], Band 2, "Interpolationssatz von Marcinkiewicz"):

Ist Φ die einen Orlicz-Raum $L_\Phi(M,\mu)$ bzw. $L_\Phi(N,\nu)$ ((M,μ) und (N,ν) seien beliebige Maßräume) charakterisierende Funktion ($\Phi(0)=0$, $\Phi(t)$ monoton wachsend und konvex für $0\leq t<\infty$, $\Phi(2t)\leq K\Phi(t)$ mit K unabhängig von $t\in[0,\infty)$, $\Phi(t)\not\equiv 0$), so heißt ein Operator T, der Funktionen aus $L_\Phi(N,\nu)$ in die Menge der meßbaren Funktionen des Maßraumes (M,μ) abbildet, vom schwachen Typ (Φ,Φ) auf einer Teilmenge D von $L_\Phi(N,\nu)$, wenn

$\mu[\,|Tf|>y\,] \leq \int_N \Phi(A|f|y^{-1})\,d\nu$ gilt für alle $f\in D$ und alle $y>0$ (A unabhängig von y und f).

Die Bedeutung dieser Definition ersieht man u.a. aus einem Satz von E.M.Stein (vgl. [3], Theorem 3):

Sei M eine kompakte Gruppe und μ das (bei Gruppenoperationen invariante) Haarmaß auf M (vgl. [7]), Φ wie oben mit $\Phi(\sqrt{t})$ konkav für $0\leq t<\infty$.
Sei (T_n), $n=1,2,\ldots$, eine Folge beschränkter linearer Operatoren von $L_\Phi(M,\mu)$ in sich, von denen jeder mit den Gruppenoperationen vertauschbar ist

(d.h., ist $f_t(x)=f(t^{-1}\circ x)$ für $t,x \in M$, $\circ$ die Gruppenoperation auf M, und $f \in L_\Phi(M,\mu)$, so gilt $T_n f_t = (T_n f)_t$ für $n=1,2,\ldots$). Ist für jedes $f \in L_\Phi(M,\mu)$ $\limsup_n |(T_n f)(x)| < \infty$ für x aus einer Menge von positivem Maß (die von f abhängen darf), so ist der Operator T, $Tf = \sup_n |T_n f|$, vom schwachen Typ (Φ,Φ) auf $L_\Phi(M,\mu)$.

(Der Satz ist in der Originalarbeit [3] noch etwas allgemeiner formuliert). Die Einschränkung über Φ ($\Phi(t^{1/2})$ konkav) entspricht speziell für $\Phi(t)= t^p$ (also $L_\Phi = L_p$, $1 \le p < \infty$) der Einschränkung $1 \le p \le 2$.

Als besonders wichtige Orlicz-Räume werden im folgenden

(1) die Räume L_{Φ_α} mit $\Phi_\alpha(t) = t(\log(c+t))^\alpha$ und die Räume $L_{\Psi_{\alpha\beta}}$ mit $\Psi_{\alpha\beta}(t) = t(\log(c+t))^\alpha(\log\log(d+t))^\beta$, $\alpha,\beta \ge 0$,

betrachtet. Für c,d hinreichend groß (abhängig von α,β) erfüllen Φ_α und $\Psi_{\alpha\beta}$ die Bedingungen einer "Orlicz-Raum erzeugenden Funktion" (s.o.) sowie die zusätzliche Bedingung des Steinschen Satzes.

Ein Orlicz-Raum $L_\Phi(M,\mu) = [f\ \mu\text{-meßbare Funktion auf M};\ \int_M \Phi(|f|)\,d\mu < \infty]$ ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|f\|_\Phi = \inf[t>0;\ \int_M \Phi(t^{-1}|f|)\,d\mu \le \Phi(1)] \text{ für } f \in L_\Phi(M,\mu).$$

Für $f_k \in L_\Phi(M,\mu)$, $k=1,2,\ldots$, gilt:

(2) $\|f_k\|_\Phi \to 0$ und $\int_M \Phi(|f_k|)\,d\mu \to 0$ $(k\to\infty)$ sind äquivalente Aussagen.

(Dies ergibt sich leicht aus den oben angegebenen Eigenschaften von Φ ohne die Einschränkung über Φ im Steinschen Satz).

Legt man die Bezeichnungen und Voraussetzungen des Steinschen Satzes zugrunde (die Voraussetzungen sind in Wirklichkeit noch allgemeiner gehalten), so kann folgende Übersicht über diese Arbeit gegeben werden:

Ist für jede Funktion $f \in L_{\Phi_\alpha}(M,\mu)$ $\limsup_n |T_n f| < \infty$ auf einer Menge von positivem Maß, so gilt für $1 < p \leq 2$:

(0) $\mu[\, T\chi > y \,] \leq (A(p-1)^{-\alpha} y^{-1} \|\chi\|_p)^p$ für $y > 0$ und jede charakteristische Funktion χ auf M (T ist vom schwachen Typ (p,p) auf der Menge der charakteristischen Funktionen mit der Konstanten $A(p-1)^{-\alpha}$).

Dieses Ergebnis erhält man unter Verwendung des Steinschen Satzes ($\mu(M) < \infty$, weil (M,μ) kompakter Haarmaßraum ist) aus Satz 1 (Teil B). - Ist umgekehrt (0) gültig (für $1 < p \leq p_1$, $p_1 > 1$), so folgt: $\sup_n |T_n f| \in L_q(M,\mu)$ für $q \in (0,1)$, falls $f \in L_{\Psi_{\alpha 1}}(M,\mu)$ ist. (Sätze 2 und 3, Teil C).

Zum Beweis von Satz 3 wird außerdem noch folgendes gebraucht: Mit einem Satz von E.M.Stein und G.Weiss [6] folgt aus (0)

$\|Tf\|_p \leq C_{p_1'} (p-1)^{-\alpha-1} \|f\|_p$ für $1 < p \leq p_1'$, $f \in L_p(M,\mu)$ $(p_1' \in (1,p_1))$.

Die Abschätzung dieser Stetigkeitskonstanten $C_{p_1'}(p-1)^{-\alpha-1}$ wird ebenfalls in Satz 1 durchgeführt (unter Verwendung von [6]). Hieraus folgt mit einem Extrapolationssatz von Zygmund bzw. Yano (vgl. [1] und [2])

$$\|Tf\|_1 \leq C \int_M |f| \, (\log^+ |f|)^{\alpha+1} \, d\mu + C \quad \text{für } f \in L_{\Phi_{\alpha+1}}(M,\mu).$$

Dieses Ergebnis wird in Teil C zitiert und beim Beweis von Satz 3 ebenfalls verwendet.

Als Anwendung von Satz 3 erhält man aus einer fundamentalen Ungleichung von R. A. Hunt (vgl.[4]) die Konvergenz der Partialsummen der Fourierreihe für jede Funktion $f \in L_{\Psi_{1+}}[0,2\pi)$ (Teil C). Das gleiche Ergebnis ist in [10], ebenfalls unter Verwendung der Huntschen Ungleichung, gewonnen worden.

In Teil D wird ein Satz über Rademacherfunktionen bewiesen, der beim Beweis des Steinschen Satzes verwendet, aber nicht bewiesen wurde (vgl. [3], Lemma 2).

Bezeichnungen

In dieser Arbeit soll der Begriff "Funktion" stets für reellwertige Funktion stehen (entsprechende Aussagen für komplexwertige Funktionen ergeben sich meist ohne weiteres). Unter einer charakteristischen Funktion auf einem Maßraum versteht man eine meßbare Funktion, die höchstens die Werte 0 und 1 annimmt; einfach heißt eine meßbare Funktion, die höchstens endlich viele, von 0 verschiedene, endliche Werte auf einer Menge endlichen Maßes annimmt.
Ein Operator S, der den Orlicz-Raum $L_\Phi(N,\nu)$ in die Menge der μ-meßbaren Funktionen des Maßraumes (M,μ) abbildet, heißt sublinear , wenn für $f,g \in L_\Phi(N,\nu)$ und reelles α gilt:
$|S(f+g)| \leq |Sf| + |Sg|$, $|S(\alpha f)| = |\alpha|\,|Sf|$ μ-fast überall auf M.

In den Teilen B und C dieser Arbeit wird mit $L_\Phi(M,\mu)$ stets ein Orlicz-Raum bezeichnet, wobei Φ die am Anfang beschriebenen Bedingungen erfüllt.

B. Interpolation

Satz 1 Seien (M,μ) und (N,ν) Maßräume; T bilde die Menge D der charakteristischen Funktionen des Maßraums (N,ν) in die Menge der μ-meßbaren Funktionen auf M ab. Ist der Operator T vom schwachen Typ $(\Phi_\alpha,\Phi_\alpha)$ und vom schwachen Typ (p_1,p_1), $p_1>1$, auf D, gilt also

(3) $\mu[\,|T\chi|>y] \le \int_N \Phi_\alpha(Ay^{-1}\chi)\,d\nu$ und

(4) $\mu[\,|T\chi|>y] \le (By^{-1}\|\chi\|_{p_1})^{p_1}$ für alle $y>0$ und alle $\chi\in D$,

so ist

(5) $\mu[\,|T\chi|>y] \le (D_{p_1\alpha}(p-1)^{-\alpha}y^{-1}\|\chi\|_p)^p$ für $1<p\le p_1$, $y>0$, $\chi\in D$.

(T vom schwachen Typ (p,p) auf D mit einer Konstanten der Größenordnung $(p-1)^{-\alpha}$).

Sind (M,μ) und (N,ν) σ-endliche Maßräume, ist (T_n), $n=1,2,\ldots$, eine Folge beschränkter linearer Operatoren von $L_{\bar\Phi}(N,\nu)$ in $L_\Phi(M,\mu)$ und gilt (5) für den Operator T, $Tf = \sup_n |T_nf|$ $(f\in L_{\bar\Phi}(N,\nu))$, so ist für jedes $p_1'\in(1,p_1)$

(6) $\|Tf\|_p \le C_{p_1'\alpha}(p-1)^{-\alpha-1}\|f\|_p$ für $f\in(L_p\cap L_\Phi)(N,\nu)$ $(1<p\le p_1')$

(T vom starken Typ (p,p) mit einer Konstanten der Größenordnung $(p-1)^{-\alpha-1}$).

Bemerkung Alle Voraussetzungen dieses Satzes sind z.B. gegeben, wenn für $L_{\bar\Phi_\alpha}(M,\mu)$ (speziell $\Phi=\Phi_\alpha$) und (T_n) der Steinsche Satz gilt (weil eine kompakte Gruppe endliches Haarmaß hat).

Beweis Für $x\ge 1$, $\beta>0$, $\alpha>0$ liegt das Maximum der Funktion (bzgl. x) $x^{-\beta}(\log x)^\alpha$ bei $x=e^{\alpha/\beta}$, so daß $(\log x)^\alpha \le (\alpha e^{-1}\beta^{-1})^\alpha x^\beta$ ist. Ist nun $\chi\in D\cap L(N,\nu)$, so folgt

für diejenige Teilmenge von N, auf der $\chi = 1$ ist, für $y \in (0,1)$ und $\beta > 0$ $\quad \Phi_\alpha(Ay^{-1}\chi) = Ay^{-1}\chi\,(\log(c+Ay^{-1}\chi))^\alpha \leq$ $(A'y^{-1}\chi)^{1+\beta}(\alpha e^{-1})^\alpha \beta^{-\alpha}$, so daß auf ganz N gilt:

$\Phi_\alpha(Ay^{-1}\chi) \leq \beta^{-\alpha}(A''y^{-1}\chi)^{1+\beta}$ $\quad (0<y\leq 1,\ \beta > 0)$.

Aus (3) folgt daher für $0<y\leq 1$ und $1<p\leq p_1$ $(\beta = p-1)$

$\mu[T\chi > y] \leq (A_1(p-1)^{-\alpha}y^{-1}\|\chi\|_p)^p$.

Für $y\geq 1$ und $1 < p\leq p_1$ ergibt sich aus (4) (wegen $\|\chi\|_{p_1}^{p_1} = \|\chi\|_p^p$) $\mu[T\chi > y] \leq (B'y^{-1})^p\,(p-1)^{-\alpha p}\|\chi\|_p^p$. Damit ist (5) bewiesen.

Daß (6) aus (5) folgt, ist mit Hilfe eines Interpolationssatzes von E. M. Stein und G. Weiss (vgl. [6], Theorem 1; auf diese Arbeit wird im folgenden bezug genommen) leicht zu zeigen (R. A. Hunt hat in [4] einen anderen Beweis mit Hilfe zweier seiner Arbeiten [8] und [9] gegeben; er weist aber auch auf die Möglichkeit hin, den erwähnten Satz von Stein und Weiss anzuwenden; dies soll hier insbesondere im Hinblick auf die Abschätzung der Konstanten in (6) geschehen).

Sei $n(x)$, $x\in M$, eine μ-meßbare Funktion, deren Wertebereich aus endlich vielen natürlichen Zahlen besteht; ein linearer Operator S sei definiert durch $(Sf)(x) = (T_{n(x)}f)(x)$ für $x\in M$ und $f\in L_\Phi(N,\nu)$. Wegen $|Sf| \leq |T_1 f| + \ldots + |T_k f|$ für eine geeignete Zahl k ist S beschränkter Operator von $L_\Phi(N,\nu)$ in $L_\Phi(M,\mu)$.

Sei $1< p\leq p_1' < p_1$ sowie $s_0 = \frac{1}{2}(1+p)$ und $p_0 = \frac{1}{2}(1+s_0)$. Wendet man (5) für p_0 und p_1 an, so erhält man für jede charakteristische Funktion χ auf N

$\|Sx\|_{s_o}^{s_o} = s_o\left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) y^{s_o-1}\,\mu[|Sx|>y]\,dy$

$\leq s_o(D(p_o-1)^{-\alpha})^{p_o}\|x\|_{s_o}^{s_o}\int_0^1 y^{s_o-p_o-1}\,dy$

$+ s_o(D(p_1-1)^{-\alpha})^{p_1}\|x\|_{s_o}^{s_o}\int_1^\infty y^{s_o-p_1-1}\,dy$

$\leq D'\|x\|_{s_o}^{s_o}(s_o-p_o)^{-1}(p_o-1)^{-\alpha p_o}+1)$; wegen $s_o-1 = 2(p_o-1) = (s_o-p_o)$ folgt

(7) $\|Sx\|_{s_o}\leq D_o(s_o-1)^{-\alpha-1}\|x\|_{s_o}$ und ebenso für $s_1 = \frac{1}{2}(p_1+p_1')$

(8) $\|Sx\|_{s_1}\leq D_1\|x\|_{s_1}$ für $x\in D$.

Für den zum linearen Operator S in [6] auf $L_{s_o'}\cup L_{s_1'}(M,\mu)$ $(s_i'^{-1}+s_i^{-1}=1,\ i=0,1)$ definierten Operator S^* folgt aus (7) und (8) (vgl. [6], Lemma 1)

(9) $\nu[|S^*f|>y]\leq (D_o'(s_o-1)^{-\alpha-1}y^{-1}\|f\|_{s_o'})^{s_o'}$ $(f\in L_{s_o'}(M,\mu), y>0)$

bzw.

(10) $\nu[|S^*f|>y]\leq (D_1' y^{-1}\|f\|_{s_1'})^{s_1'}$ für $f\in L_{s_1'}(M,\mu)$ und $y>0$.

Mit dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz (vgl. [1], Bd.2) erhält man daraus für p', $p'^{-1}+\rho^{-1}=1$ (also $p'\in(s_1',s_o')$)

$\|S^*f\|_{p',\nu}\leq C(s_o-1)^{-\alpha-1}(p'(s_o'-p')^{-1}+p'(p'-s_1')^{-1})^{1/p'}\ \|f\|_{p',\mu}$.

Wegen $p'-s_1'\geq p_1'(p_1'-1)^{-1} - s_1(s_1-1)^{-1} > 0$ und

$s_o'-p' = s_o(s_o-1)^{-1}-p(p-1)^{-1} = (p-1)^{-1}(2\varepsilon_o-p)=(p-1)^{-1}\geq(p_1'-1)^{-1}$

folgt $\|S^*f\|_{p'}\leq C'(p-1)^{-\alpha-1}\|f\|_{p'}$ für $f\in L_{p'}(M,\mu)$.

Da für einfache Funktionen g auf N $S^{**}g = Sg$ ist, (vgl.[6]) hat man für einfache Funktionen g

(11) $\|Sg\|_p\leq C'(p-1)^{-\alpha-1}\|g\|_p$.

S besitzt daher eine eindeutig definierte lineare Erweiterung S_1 auf $L_p(N,\nu)$, für die (11) richtig ist. Ist g eine beliebige Funktion aus $(L_p\cap L_\Phi)(N,\nu)$, so gibt es eine Folge (g_k)

einfacher Funktionen mit $|g_k|$ monoton wachsend (bzgl. k) und $\lim_k g_k = g$ auf N. Wegen $\lim_k \|g_k - g\|_\varphi = 0$ (vgl. (2)) gibt es, da S ein beschränkter Operator ist, eine Teilfolge (h_k) von (g_k) mit $\lim_k Sh_k = Sg$ μ-fast überall auf M. Wegen (11) gibt es eine Teilfolge (l_k) von (h_k) mit $\lim_k S_1 l_k = S_1 g$ μ-fast überall auf M, so daß $S_1 g = Sg$ μ-fast überall auf M gilt und somit (11) für alle g aus $(L_p \cap L_\Phi)(N,\nu)$ richtig ist. Schließlich gibt es zu jeder solchen Funktion g eine Folge von Funktionen $n_k(x)$ ($n_k(x)$ wie n(x) im bisherigen Beweis; k=1,2,...), so daß $|Tg| = \lim_k |T_{n_k(x)} g|(x)$ für $x \in M$ gilt, woraus mit dem Satz von Lebesgue die Behauptung (6) folgt. (Man kann die Folge $(|T_{n_k(x)} g|(x))$ monoton wachsend (bzgl. k) für $x \in M$ wählen).

C. Extrapolation; Anwendung

Seien (M,μ) und (N,ν) endliche Maßräume, (T_n), $n=1,2,\ldots$, eine Folge beschränkter sublinearer Operatoren von $L_\Phi(N,\nu)$ in $L_\Phi(M,\mu)$, $\Phi(t) \leq$ const. $\Phi_\alpha(t)$ für $t \geq 1$. Dann gilt der folgende Extrapolationssatz (vgl. [2] und [1], Bd. 1, S. 119):

Sei $Tf = \sup_n |T_n f|$ für $f \in L_\Phi(N,\nu)$, $D = [f;$ f ν-meßbare Funktion auf N mit Wertebereich $\subset [0] \cup [t;\ 1 \leq t \leq c]\ ]$ für eine Konstante $c>1$.

Gilt für $f \in D$ und $p \in (1,p_1]$ $(p_1>1)$

$$(12)\quad \|Tf\|_p \leq C(p-1)^{-\alpha} \|f\|_p ,$$

so ist für $f \in L_{\Phi_\alpha}(N,\nu)$

$$(13)\quad \|Tf\|_1 \leq A \int_N |f|\ (\log^+|f|)^\alpha \, d\nu + B .$$

(A und B hängen nur von $\mu(M)$, $\nu(N)$, p_1 und c ab).

Daß dieser Satz in dieser von den zitierten Literaturstellen abweichenden Form gilt, ergibt sich mit dem folgenden Hilfssatz 1 aus der Arbeit [2]. In Satz 2 wird die Voraussetzung (12) (T vom starken Typ (p,p)) ersetzt durch die schwächere Voraussetzung: T vom schwachen Typ (p,p):

Satz 2

Gilt unter den genannten Voraussetzungen anstelle von (12)

$$(14)\quad \mu[Tf > y] \leq (C(p-1)^{-\alpha} y^{-1} \|f\|_p)^p \quad \text{für } p \in (1,p_1],\ y>0 \text{ und } f \in D,$$

so ist für $f \in L_{\Psi_{\alpha 1}}(N,\nu)$, $q \in [q_0,1)$ $(q_0 \in (0,1))$

$$(15)\quad \int_M (Tf)^q \, d\mu \leq D_1(1-q)^{-1} \int_N |f|\ (\log^+|f|)^\alpha \log\log^+|f| \, d\nu + D_2$$

$(D_i = D_i(q_0)$ unabhängig von f und q, $i=1,2)$.

Zum Beweis werden zunächst zwei Hilfssätze angegeben.

Hilfssatz 1 Seien (M,μ) und (N,ν) σ-endliche Maßräume; ist (T_n), $n=1,2,\ldots$, eine Folge beschränkter sublinearer Operatoren von $L_\Phi(N,\nu)$ in $L_\Phi(M,\mu)$ und $Tf = \sup_n |T_n f|$ für $f \in L_\Phi(N,\nu)$, so gilt für ν-meßbare Funktionen f_k mit $0 \le f_k$ und $f = \sum_1^\infty f_k \in L_\Phi(N,\nu)$: $T(\sum_1^\infty f_k) \le \sum_1^\infty Tf_k$ μ-fast überall auf M.

Beweis Ist E eine μ-meßbare Teilmenge von M mit positivem endlichem Maß, so gilt für den beschränkten sublinearen Operator S_k, $S_k f = \sup_{n\le k} |T_n f|$ für $f \in L_\Phi(N,\nu)$ (Beschränktheit wegen $0 \le S_k \le |T_1| + \ldots + |T_k|$; $k=1,2,\ldots$):

$$\lim_n \int_E S_k(\sum_1^n f_i)\, d\mu = \int_E S_k(\sum_1^\infty f_i)\, d\mu .$$

(Man beachte: $|S_k g_1 - S_k g_2| \le S_k(g_1 - g_2)$ μ-fast überall auf M für $g_1, g_2 \in L_\Phi(N, \ )$; außerdem gilt (2) und: $\Phi(t) \ge c_\gamma t$ für $t \ge \gamma$ mit $c_\gamma \in (0,\infty)$ für jedes $\gamma > 0$ aufgrund der Eigenschaften von Φ (vgl. Anfang von Teil A), also für $0 \le h \in L_\Phi(M,\mu)$ $\int_E h\, d\mu \le \gamma\mu(E) + c_\gamma^{-1} \int_E \Phi(h)\, d\mu$).

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es also ein $n = n(\varepsilon)$ mit

$$\int_E S_k(\sum_1^\infty f_i)\, d\mu \le (1+\varepsilon) \int_E S_k(\sum_1^n f_i)\, d\mu \le (1+\varepsilon) \int_E \sum_1^n S_k f_i\, d\mu \le$$

$$(1+\varepsilon) \int_E \sum_1^\infty Tf_i\, d\mu, \text{ und somit ist}$$

$$\int_E T(\sum_1^\infty f_i)\, d\mu = \lim_k \int_E S_k(\sum_1^\infty f_i)\, d\mu \le \int_E \sum_1^\infty Tf_i\, d\mu .$$

Hieraus folgt die Behauptung, weil E beliebig gewählt war.

Hilfssatz 2

Seien (M,μ) und (N,ν) Maßräume mit $\mu(M)<\infty$; sei $0< p_1 \leq \infty$ und $0 < q < q_1 < \infty$. Ist $g \in L_{p_1}(N,\nu)$ und h eine μ-meßbare Funktion auf M mit

$\mu[|h| > y] \leq (Dy^{-1} \|g\|_{p_1})^{q_1}$ für alle $y>0$, so gilt:

$$\|h\|_q \leq D\,(\mu(M))^{1/q - 1/q_1}\,(q_1(q_1-q)^{-1})^{1/q}\,\|g\|_{p_1}.$$

Beweis Es ist $\|h\|_q^q = q\int_0^\infty y^{q-1}\,\mu[|h| > y]\,dy =$

$q\left(\int_0^C + \int_C^\infty\right) y^{q-1}\,\mu[|h| > y]\,dy \leq \mu(M)C^q + qD^{q_1}\|g\|_{p_1}^{q_1} C^{q-q_1}(q_1-q)^{-1}$

(durch Einsetzen der Voraussetzung im zweiten Integral).

Für $C = D\|g\|_{p_1}(\mu(M))^{-1/q_1}$ wird der letzte Ausdruck minimal; durch Einsetzen ergibt sich die Behauptung.

An dieser Stelle sollen zwei Beispiele für die Anwendungsmöglichkeit von Hilfssatz 2 gegeben werden:

1. Für die konjugierte Funktion $\tilde{f}$ von f ($f \in L(0,2\pi)$, periodisch mit 2π) gilt

$\lambda[|\tilde{f}| > y] \leq Cy^{-1}\|f\|_1$ für $y>0$ und $f \in L(0,2\pi)$ (d.h., die Operation $f \to \tilde{f}$ ist vom schwachen Typ (1,1) auf $L(0,2\pi)$, vgl. [1], Bd. 1, Kap. 4; 3.16). Hieraus folgt mit Hilfssatz 2 $\|\tilde{f}\|_q \leq C'(1-q)^{-1}\|f\|_1$ für $f \in L(0,2\pi)$, $q \in (0,1)$ (vgl. [1], Bd. 1, Kap. 7; 2.6).

2. Manchmal ist der Interpolationssatz von Marcinkiewicz nicht anwendbar, obwohl zwei "schwacher Typ-Ungleichungen" vorliegen; man kann dann u.U. eine Interpolation mit Hilfssatz 2 und dem Konvexitätssatz von Riesz-Thorin dennoch durchführen:

Sei $s_n(f)$ die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f ($f \in L(0,2\pi)$, periodisch mit 2π). Dann gilt für $f \in L_2(0,2\pi)$

$$\left\| \sup_{n\geq 2} |s_n(f)|(\log n)^{-1/2} \right\|_2 \leq B \|f\|_2 \quad \text{(vgl. [1], Bd.2, S. 166/67)}$$

und für $f \in L(0,2\pi)$ (λ sei das Lebesgue-Maß)

$$\lambda \left[\sup_{n\geq 2} |s_n(f)|(\log n)^{-1} > y \right] \leq Dy^{-1} \|f\|_1 \quad \text{für } y>0$$

(wegen $s_n(f) = o(\log n)$ fast überall in $[0,2\pi)$ und der Anwendbarkeit des Steinschen Satzes).

Hier ist eine Interpolation (für $p \in (1,2)$) direkt nicht möglich; wegen Hilfssatz 2 läßt sich die Eigenschaft des schwachen Typs (1,1) auf die des starken Typs (q,1), $0 < q < 1$, übersetzen:

$$\left\| \sup_{n\geq 2} |s_n(f)|(\log n)^{-1} \right\|_q \leq D_q \|f\|_1 , \quad 0<q<1, \ f \in L(0,2\pi).$$

Nun läßt sich der Satz von Riesz-Thorin (zunächst auf $s_{n(x)}(f)$ mit dem Maß $dx\,(\log n(x))^{-q}$, vgl. den Beweis zu Satz 1) anwenden, und man erhält

$$\left\| \sup_{n\geq 2} |s_n(f)|(\log n)^{-1/p} \right\|_{p'} \leq D_{q,p} \|f\|_p \quad \text{für } 1 \leq p \leq 2, \ p' = qp$$

und $f \in L_p(0,2\pi)$ ($q \in (0,1)$ beliebig). Man bekommt so das bekannte Resultat $s_n(f) = o(\log n)^{1/p}$ fast überall für $f \in L_p(0,2\pi)$ (aber nicht die bessere Stetigkeitsrelation mit p anstelle von p' in der letzten Ungleichung für $1<p<2$; vgl. [1], Bd. 2, S. 167).

Beweis von Satz 2

Man kann sich, wie man aus dem Beweis ersieht, auf den Fall $c=e$, $p_1=2$ und $f \geq e^2$ auf N beschränken (letzteres wegen $f = (f^+ + e^2) + (f^- - e^2)$).

Sei für $k=2,3,\ldots$ $\quad f_k = \left\{ \begin{array}{ll} f, & \text{falls } e^k \leq f < e^{k+1} \\ 0 & \text{sonst auf N} \end{array} \right\}$,

$E_k = [\, e^k \leq f < e^{k+1}\,]$ und $\varepsilon_k = \nu(E_k)$.

Ist $q \in (0,1)$ gegeben, so wird $\beta = 4^{1/q - 1}$, $\delta_k = \frac{\log\beta}{\log k}$

und $q_k = (1 + \frac{1}{2}\delta_k)^{-1}$ $(\geq q)$ gesetzt $(k=2,3,\ldots)$; dann gilt

(17) $\beta^{-q_k/(1-q_k)} = k^{-2}$ und $1-q_k = \frac{1}{2}\delta_k q_k \geq \frac{(1-q)\log 4}{2\log k}$

für $k = 2,3,\ldots$.

Wegen Hilfssatz 2 und der Voraussetzung (14) ist für $p_k = 1+k^{-1}$

$\|Tf_k\|_{q_k} \leq Ck^{\alpha}(\mu(M))^{1/q_k - 1/p_k}(p_k(p_k-q_k)^{-1})^{1/q_k}\|f_k\|_{p_k} \leq$

$C_1(1-q_k)^{-1} e^k k^{\alpha} \varepsilon_k^{k/(k+1)}$, also wegen (17) und $f_k \geq e^k$ auf E_k

(18) $\|Tf_k\|_{q_k} \leq C_2(1-q)^{-1} \int\limits_N f_k(\log f_k)^{\alpha} \log\log f_k \, d\nu \, \varepsilon_k^{-1/(k+1)}$

für $k = 2,3,\ldots$ (Dabei ist die Konstante $C_2 = C_2(q_0)$ unabhängig von k und $q \in [q_0,1)$).

Mit $I = [\, k \geq 2;\ \varepsilon_k < 9^{-k}\,]$ gilt für $k \in I$ nach Hilfssatz 2

$\|Tf_k\|_1 \leq A' \|f_k\|_2 \leq A'e(3^{-1}e)^k$; hieraus folgt mit Hilfsatz 1

$\|T(\sum\limits_I f_k)\|_q \leq C_3 \|T(\sum\limits_I f_k)\|_1 \leq C_3 \sum\limits_I \|Tf_k\|_1 \leq C_4$ und damit

(19) $\int\limits_M (T(\sum\limits_I f_k))^q \, d\mu \leq C_5$ $\quad (C_5$ unabhängig von $q \in (0,1))$.

Für $k \notin I$, $k \geq 2$, ist $\varepsilon_k^{\frac{-1}{k+1}} \leq 9^{k/(k+1)} \leq 9$; wegen (18) ist also

(20) $\|Tf_k\|_{q_k} \le D'(1-q)^{-1} \int_N f_k(\log f_k)^{\alpha} \log\log f_k \, d\nu$

für $k \ge 2$, $k \notin I$ $(D' = 9C_2)$.

(21) Sei $J = [k \ge 2;\ k \notin I$ und $(\int_M (Tf_k)^{q_k} \, d\mu)^{1/q_k - 1} \le \beta^{-1}]$

und $J' = [2,3,\ldots] - (I \cup J)$.

Für die Funktion $\phi(t) = \left\{ \begin{array}{l} t, \text{ falls } 0 \le t \le 1 \\ t^q, \text{ falls } 1 \le t < \infty \end{array} \right\}$ gilt offenbar $\phi(u+v) \le \phi(u) + \phi(v)$ und $\phi(u) \le u^{q'}$ für $q \le q' \le 1$ und $u, v \in [0, \infty)$.

Wegen (20), (21) und (17) folgt daner (man beachte: $q \le q_k < 1$ und $\beta = \beta(q) \le \beta(q_o) < \infty$)

(22) $\int_M \phi(Tf_k) \, d\mu \le \int_M (Tf_k)^{q_k} d\mu \le \beta^{-q_k/(1-q_k)} = k^{-2}$ für $k \in J$

und

(23) $\int_M \phi(Tf_k) d\mu \le (\int_M (Tf_k)^q \, d\mu)^{1-1/q_k} \|Tf_k\|_{q_k} \le$

$D_1(1-q)^{-1} \int_N f_k(\log f_k)^{\alpha} \log\log f_k \, d\nu$ für $k \in J'$

(D_1 unabhängig von k und $q \in [q_o, 1)$).

Mit Hilfssatz 1 erhält man hieraus wegen $\phi(t) = t^q$ für $t \ge 1$

$$\int_M T(\sum_{J,J'} f_k)^q \, d\mu \le \mu(M) + \int_M \phi(T \sum_{J,J'} f_k) d\mu \le$$

$$D_1(1-q)^{-1} \int_N f(\log f)^{\alpha} \log\log f \, d\nu + \mu(M) + \sum_2^{\infty} k^{-2} .$$

Wegen (19) und (21) ist damit Satz 2 bewiesen.

R. A. Hunt hat in [4] u.a. folgendes Ergebnis für die Partialsummen $s_n(f)$ der Fourierreihe von f erhalten:

(24) $\lambda[\sup_{n\geq 0} |s_n(x)| > y] \leq (C(p-1)^{-1}y^{-1}\|x\|_p)^p$

für jede charakteristische Funktion χ auf $[0,2\pi)$, $y>0$ und $p\in(1,2]$. (λ sei das Lebesgue-Maß auf $[0,2\pi)$).

Wenn Satz 2 auch noch unter der schwächeren Voraussetzung - (14) gültig nur für jede charakteristische Funktion auf N - richtig ist, so folgt aus (24)

(25) $\sup_{n\geq 0} |s_n(f)| \in L_q(0,2\pi]$ für jedes $q\in(0,1)$,

falls $f\in L_{\Psi_{1,1}}[0,2\pi)$ (vgl. (1)).

Hieraus erhält man mit dem Steinschen Satz

(26) $\lambda[\sup_{n\geq 0} |s_n(f)| > y] \leq \int_0^{2\pi} \Psi_{1,1}(A|f|y^{-1})\,d\lambda$ für $f\in L_{\Psi_{1,1}}[0,2\pi)$ und $y>0$ (A unabhängig von f und y).

Sei $f\in L_{\Psi_{1,1}}[0,2\pi)$; dann gibt es eine Folge trigonometrischer Polynome P_k mit $\lim_k \int_0^{2\pi} \Psi_{1,1}(|f-P_k|)\,d\lambda = 0$.

Ist $\varepsilon>0$ gegeben, so gibt es wegen (26) eine Teilfolge (Q_k) von (P_k) mit $\lim_k Q_k = f$ fast überall in $[0,2\pi)$ und

$\lambda[\sup_{n\geq 0} |s_n(f-Q_k)| > 2^{-k}] \leq \varepsilon 2^{-k}$ für $k = 1,2,\ldots$.

Damit ist $\sup_{n\geq 0} |s_n(f-Q_k)| \leq 2^{-k}$ auf einer Menge $E\subset[0,2\pi)$ vom Maße $\lambda(E)\geq 2\pi-\varepsilon$ (E unabhängig von k).

Da $s_n(Q_k) = Q_k$ ist für $n\geq n_0(k)$, folgt für fast alle $x\in E$ $|(Q_k-f)(x)| \leq \varepsilon$, falls $k\geq k_0(x)$, und damit für $k\geq k_0(x)$, $n\geq n_0(k)$

$$|s_n(f) - f| \le |s_n(f-Q_k)| + |Q_k - f| \le 2^{-k} + \varepsilon .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, bedeutet dies

(27) $\lim_n s_n(f) = f$ fast überall in $[0,2\pi)$, falls

$\int_0^{2\pi} |f| \log^+ |f| \log\log^+ |f| \, d\lambda < \infty$ ist.

Dieses Ergebnis ist auf einem anderen Weg in [10], ebenfalls aus der Huntschen Ungleichung (24) gewonnen worden.
Vor Erscheinen von [10] sah in der ersten Fassung dieser Arbeit die Behauptung von Satz 2 (und entsprechend die von Satz 3) folgendermaßen aus:

(28) $\int_M (Tf)^q \, d\mu \le D_1 (1-q)^{-1} \int_N |f| (\log^+ |f|)^{\alpha+\delta} \, d\nu + D_2$

für $f \in L_{\Phi_{\alpha+\delta}}(N,\nu)$, $\delta > 0$ (D_i unabhängig von f und $q \in [q_0,1)$).
Hieraus folgt (wie (27)) aus der Huntschen Ungleichung (24) die Konvergenz der Folge $(s_n(f))$ (fast überall), falls
$\int_0^{2\pi} |f| (\log^+ |f|)^{1+\delta} \, d\lambda < \infty$ für eine Zahl $\delta > 0$ ist.
Um (24) anwenden zu können, muß Satz 2 in einer etwas schärferen Form bewiesen werden:

Satz 3 Seien (M,μ) und (N,ν) endliche Maßräume; sei $p_1 > 1$ und (T_n), $n=1,2,\ldots$, eine Folge beschränkter linearer Operatoren von $L_{\Psi_{\alpha 1}}(N,\nu)$ in $L_{\Psi_{\alpha 1}}(M,\mu)$ (oder von $L(N,\nu)$ in $L(M,\mu)$). Gilt für den Operator T, $Tf = \sup_n |T_n f|$ ($f \in L_{\Psi_{\alpha 1}}(N,\nu)$),

(29) $\mu[T\chi > y] \le (C(p-1)^{-\alpha} y^{-1} \|\chi\|_p)^p$ für $y > 0$, $p \in (1,p_1]$ und jede charakteristische Funktion χ auf N, so ist für $0 < q_0 \le q < 1$

(30) $\int_M (Tf)^q d\mu \le D_1 (1-q)^{-1} \int_N |f| (\log^+ |f|)^{\alpha} \log\log^+ |f| \, d\nu$
$+ D_2 \left(\int_N |f| (\log^+ |f|)^{\alpha} \, d\nu \right)^q + D_3$, falls $f \in L_{\Psi_{\alpha 1}}(N,\nu)$

($D_i = D_i(q_o)$ unabhängig von f und q).

Beweis Mit Satz 1 und (13) erhält man aus (29)

(31) $\|Tg\|_1 \le A \int_N |g| (\log^+|g|)^{\alpha+1} d\nu + B$ für $f \in L_{\Phi_{\alpha+1}}(N,\nu)$.

Sei wieder $p_1 = 2$ und $f \ge e^2$ vorausgesetzt (vgl. Beweis von Satz 2). Für jede Zahl $k \in [2,3,\ldots]$ sei für $i = 0,1,..,k-1$

$$f_{ki} = \left\{ \begin{matrix} c_{ki}, \text{ falls } c_{ki} \le f < c_{k,i+1} \\ 0 \text{ sonst auf } N \end{matrix} \right\} \text{ mit } c_{ki} = e^k + ik^{-1}(e-1)e^k.$$

(32) Sei $f = g + \sum_2^\infty f_k$, $f_k = \sum_{i=0}^{k-1} f_{ki}$, $E_k = [e^k \le f < e^{k+1}]$

und $\nu(E_k) = \varepsilon_k$ $(k = 2,3,\ldots)$.

Dann ist $0 \le g < k^{-1}(e-1)e^k$ auf E_k und (da $k \le \log f < k+1$ auf E_k)

$$\int_N g(\log^+ g)^{\alpha+1} d\nu \le \sum_2^\infty \int_{E_k} (e-1)k^{-1}e^k (\log f)^{\alpha+1} d\nu$$

$$\le C' \sum_2^\infty \int_{E_k} f(\log f)^\alpha d\nu = C' \int_N f(\log f)^\alpha d\nu .$$

Mit (31) erhält man folglich

(33) $\|Tg\|_q^q \le C_1 \|Tg\|_1^q \le D_2 (\int_N f(\log^+ f)^\alpha d\nu)^q + D_3'$.

Zu $q \in [q_o,1)$ sei β, δ_k und $q_k (\ge q)$ für $k=2,3,\ldots$ wie im Beweis von Satz 2 gewählt. Da die Funktionen f_{ki} Vielfache von charakteristischen Funktionen sind, gilt für sie die Voraussetzung (29) und daher wegen Hilfssatz 1 und (17)

(34) $\|Tf_{ki}\|_{q_k} \le C_3 (1-q)^{-1} k^\alpha \log k \, \|f_{ki}\|_{p_k}$ $(i=0,1,..,k-1;$

$k=2,3,\ldots;$ $p_k = 1 + k^{-1})$.

Wegen $(a_1+\ldots+a_k)^r \le k^{r-1}(a_1^r+\ldots+a_k^r)$ für nichtnegative reelle Zahlen $a_1,\ldots,a_k$ und $r \ge 1$ folgt (mit $r = p_k q_k^{-1}$)

$$(\int_M (Tf_k)^{q_k} d\mu)^{p_k/q_k} \le k^{p_k/q_k - 1} \sum_{i=0}^{k-1} (\int_M (Tf_{ki})^{q_k} d\mu)^{p_k/q_k}$$

$$\leq k^{p_k/q_k - p_k}\ k^{1/k}\,(C_2(1-q)^{-1})^{p_k}\,(k^{\alpha}\log k)^{p_k}\ \sum_{i=0}^{k-1} \|f_{ki}\|_{p_k}^{p_k},$$

also wegen (32) (vgl. die Herleitung von (18))

$$\|Tf_k\|_{q_k} \leq C_4(1-q)^{-1}k^{1/q_k-1}\,\|f_k\|_{p_k}\,k^{\alpha}\log k$$

$$\leq C_4(1-q)^{-1}\ k^{(1-q_k)/q_k} \int_N f_k(\log f_k)^{\alpha}\log\log f_k\,d\nu\ \varepsilon_k^{-1/(k+1)}.$$

Wegen (17) ist $q_k^{-1}(1-q_k) = \frac{1}{2}\delta_k = \frac{1}{2}(\log\beta)(\log k)^{-1}$, also $k^{(1-q_k)/q_k} = \beta^{1/2} \leq (\beta(q_0))^{1/2}$

Man erhält somit (18) für k=2,3,... .

Hieraus folgt wie im Beweis von Satz 2 die Behauptung, jedoch wird (19) diesmal aus

$$\|Tf_k\|_1 \leq D_4\ \|Tf_k\|_{3/2} \leq D_5\ \|f_k\|_{3/2} \leq D_5 e(e3^{-1})^k$$

gewonnen, wobei man die zweite dieser Ungleichungen aus Satz 1 erhält (für $k\in I$, I wie im Beweis von Satz 2).

(27) ergibt sich aus der Huntschen Ungleichung auch direkt (ohne Verwendung des Steinschen Satzes) aus (30); denn ist (P_k) eine Folge trigonometrischer Polynome mit $\lim_k \int_0^{2\pi} \Psi_{11}(|f-P_k|)\,d\lambda = 0$, so folgt aus (30) mit $c(f-P_k)$ anstelle von f und anschließender Division durch c^q (c>1):

$$\int_M (T(f-P_k))^q\,d\mu \leq D_1(1-q)^{-1}c^{1-q} \int_N |f-P_k|\log^+|c(f-P_k)| \cdot$$

$$\log\log^+ c|f-P_k|\,d\nu + D_2\Big(\int_N |f-P_k|\log^+|c(f-P_k)|\,d\nu\Big)^q + D_3c^{-q}.$$

Ist $\varepsilon>0$ gegeben und c so groß, daß $D_3c^{-q}\leq\varepsilon$ ist, so folgt wegen der Konvergenz der beiden Integralausdrücke auf der rechten Seite der Ungleichung (gegen 0), daß $\limsup_k \|T(f-P_k)\|_q^q = 0$ ist. Hieraus erhält man (27) (ähnlich wie (27) aus (26) folgt):

D. Anhang

Hier soll der Beweis für einen Satz über Rademacherreihen gegeben werden, der beim Beweis des Steinschen Satzes verwendet, aber nicht bewiesen wurde (vgl. [3], Lemma 2).

Mit den Rademacher-Funktionen $r_o(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{sonst in } [0,1) \end{cases}$,

$r_o(t+g) = r_o(t)$ für jede ganze Zahl g, $r_n(t) = r_o(2^n t)$

(t reell, $n = 0,1,\ldots$), sei für jede Folge (a_n), $n = 0,1,\ldots$,

reeller Zahlen a_n mit $\sum_0^\infty a_n^2 < \infty$ $F(t) = F(t;(a_n)) = \sum_0^\infty a_n r_n(t)$

gesetzt (die Reihe konvergiert fast überall).

Damit gilt der folgende Satz

Satz Sei E eine Lebesgue-meßbare Teilmenge des Intervalls $[0,1]$ mit positivem Maß. Dann gibt es zu jeder Zahl $A > 2$ eine natürliche Zahl $N_o = N_o(E,A)$, so daß für alle Rademacherreihen (der beschriebenen Art) gilt:

(a) $\left(\sum_N^\infty |a_n|^2 \right)^{1/2} \le A \operatorname*{supess}_{t \in E} |F(t)|$ für alle $N \ge N_o$;

N_o ist dabei unabhängig von der Folge (a_n) (für Folgen komplexer Zahlen ist der Satz für $A > 4$ richtig).

In [3] wurde zum Beweis dieses Satzes auf [1], Bd. 1, S. 213, verwiesen. Dort findet man jedoch nur einen Satz (Lemma 8.3), bei dem für jedes $A > 1$ anstelle von (a) die Aussage

(b) $\left(\sum_N^\infty |a_n|^2 \right)^{1/2} \le A \operatorname*{supess}_{t \in E} |F_N(t)|$ für jedes $N \ge N_o(E,A)$

mit $F_N(t) = \sum_N^\infty a_n r_n(t)$ gemacht wird.

Da (a) (auch in der in [3] gebrauchten schwächeren Form) nicht ohne weiteres aus (b) folgt, soll (a) hier bewiesen werden.

Hilfssatz (vgl. [1], Bd. 1, S. 217: Theorem 8.27)

Ist $\sum_0^\infty c_i^2 < \infty$, $f(x) = \sum_0^\infty c_i r_i(x)$ (c_i, x reell, $i=0,1,\ldots$),

so gilt $\lambda[0\le x\le 1;\ f(x)\ge \alpha\delta(\sum_0^\infty c_i^2)^{1/2}] \ge \frac{1}{12}(1-\delta)^2$

sowie $\lambda[0\le x\le 1;\ f(x)\le -\alpha\delta(\sum_0^\infty c_i^2)^{1/2}] \ge \frac{1}{12}(1-\delta)^2$

für jede Zahl $\delta\in(0,1)$ (α ist eine absolute positive Konstante). Speziell für $\delta\to 0$ erhält man daraus $\lambda[0\le x\le 1;\ f(x)>0]\ge\frac{1}{12}$ und $\lambda[0\le x\le 1;\ f(x)<0]\ge\frac{1}{12}$, falls $\sum_0^\infty c_i^2 > 0$ ist.

Der Hilfssatz ergibt sich wie an der angegebenen Stelle in [1] unter expliziter Verwendung der dabei auftretenden Konstanten.

Beweis des Satzes Sei $x\in(0,1)$, $x\ne m2^{-n}$ für alle natürlichen Zahlen m und n. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Folge von Intervallen $I_k(x) = I_{k,l(x)}$ mit $x\in I_k(x)$, wobei $I_{k,l} = (l2^{-k},(l+1)2^{-k})$ $(k = 0,1,\ldots;\ l = 0,\ldots,2^k-1)$ ist. Mit $f_k(x) = 2^{-k}\lambda(I_k(x)\cap E)$ gilt dann fast überall (an jedem Differationspunkt der charakteristischen Funktion von E):
$\lim_k f_k(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{falls } x\in E \\ 0 & \text{sonst in } (0,1)\end{array}\right\}$. Nach dem Satz von Egoroff gibt es eine Menge $E'\subset E$, $\lambda(E')>0$, so daß $f_k(x)$ gleichmäßig gegen 1 strebt für $x\in E'$.

Sei $0<\varepsilon<\frac{1}{12}$; es gibt dann eine Zahl $k_0=k_0(\varepsilon)$ mit

(c) $\lambda(E\cap I_k(x)) \ge (1-\varepsilon)2^k$ für alle $k\ge k_0$ und alle $x\in E'$.

Für eine Folge (a_n) mit $\sum_0^\infty a_n^2 < \infty$ gibt es wegen (b) zu $A > 1$ eine Zahl $N_o(A,E')$ mit

(d) $\left(\sum_N^\infty a_n^2 \right)^{1/2} \leq A \operatorname{supess}_{t \in E'} |F_N(t)|$ für alle $N \geq N_o(A,E')$.

Sei nun $N \geq \operatorname{Max}(N_o,k_o)$ und $a_n \neq 0$ für ein $n \geq N$ (sonst ist (a) trivialerweise richtig). Für $G(t) = F_N(t2^{-N}) = \sum_N^\infty a_n r_{n-N}(t)$ ist nach dem obigen Hilfssatz $\lambda[0<t<1;\ G(t)>0] \geq \frac{1}{12}$, $\lambda[0<t<1;\ G(t)<0] \geq \frac{1}{12}$, und daher gilt

(e) $\lambda[t \in I_{N,k};\ F_N(t)>0] \geq \frac{1}{12} 2^{-N}$, $\lambda[t \in I_{N,k};\ F_N(t)<0] \geq \frac{1}{12} 2^{-N}$ für $k = 0,1,\ldots,2^N-1$.

Für ein $k \in [0,\ldots,2^N-1]$ ist $0 < s = \operatorname{supess}_{t \in E'} |F_N(t)| = \operatorname{supess}_{t \in I_{N,k} \cap E'} F_N(t)$ und $\lambda(I_{N,k} \cap E') > 0$. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde hier angenommen, daß das wesentliche Supremum vom positiven Teil der Funktion F_N erreicht wird).

Zu $u \in (0,s)$ existiert eine Menge $M = M_u \subset I_{N,k} \cap E'$, $\lambda(M) > 0$, mit $F_N(t) \geq u$ für $t \in M$. Die Summe $G_N(t) = \sum_0^{N-1} a_n r_n(t)$ ist für $t \in I_{N,k}$ konstant $(=G)$.

1. Fall: $G \geq -2^{-1}u$; dann ist $\operatorname{supess}_{t \in E} |F(t)| \geq \operatorname{supess}_{t \in M} |F(t)| \geq \frac{u}{2}$.

2. Fall: $G < -2^{-1}u$; wegen (e) und (c) ist

$\lambda(I_{N,k} \cap [F_N<0]) \geq \frac{1}{12} 2^{-N}$ und $\lambda(E \cap I_{N,k}) > \frac{11}{12} 2^{-N}$.

Daher ist $\operatorname{supess}_E |F(t)| \geq \operatorname{supess}_{E \cap [F_N<0] \cap I_{Nk}} |F| \geq -G > \frac{u}{2}$.

Da u aus (0,s) beliebig gewählt war, folgt wegen (d) die Behauptung (a). Für komplexe Folgen (a_n) ergibt sich die im Satz formulierte entsprechende Behauptung ohne weiteres aus (a).

Literatur

[1] A. Zygmund Trigonometric Series, Bd. 1,2 (1959)

[2] S. Yano An extrapolation theorem, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), S. 296 - 305

[3] E. M. Stein On limits of sequences of operators, Ann. of Math. 74 (1961), S. 140 - 170

[4] R. A. Hunt On the convergence of Fourier series Orthogonal expansions and their continuous analogues. Proc. Conf. Southern Illinois, Univ. Edvardsville 1967, South. Ill. Univ. Press (1968), S. 235 - 255

[5] L. Carleson On Convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series, Acta Math. 116(1966), S. 135 - 157

[6] E.M. Stein, G. Weiss An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications, J. of Math. and Mech. 8 (1959), S. 263 - 284

[7] L. Nachbin The Haar Integral, van Nostrand (1965)

[8] R. A. Hunt An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), S. 803 - 807

[9] R. A. Hunt On L(p,q) Spaces, Enseignement Math. 12 (1966), S. 249 - 276

[10] Per Sjölin An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series, Arkiv för Matematik 7 (42) (1967), S. 551 -570

Lebenslauf.

Ich wurde am 2. 12. 1939 in Lomotau/CSSR geboren.
Von 1946 bis 1957 besuchte ich Volks- und Mittelschule
im Kreis Marburg; anschließend war ich bis zur Reife=
prüfung im Frühjahr 1961 Schüler der Schwalmschule in
Treysa. Vom Sommersemester 1961 an studierte ich an
der Philipps-Universität in Marburg/L. Mathematik. In
diesem Fach legte ich im März 1967 die Diplomprüfung ab.
Anschließend war ich bis zur Einreichung dieser Disser=
tation am 30. 9. 1969 wissenschaftliche Hilfskraft am
Mathematischen Institut der Philipps-Universität.

Peter Bautsch